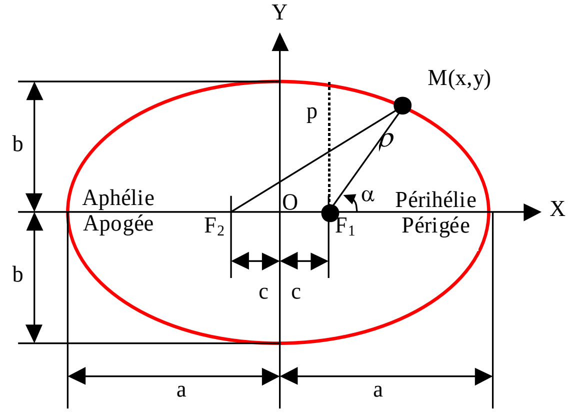
Lois de Kepler

Kepler est né en 1571 dans une famille protestante luthérienne dans la ville de Weil (Wurtemberg). Alors qu'il projette de devenir ministre luthérien, l'école protestante de Graz demande un professeur de mathématiques. Il abandonne alors ses études en théologie pour prendre le poste en 1594. Il avait auparavant suivi les cours d'astronomie de Michael Maestlin qui, obligé d'enseigner le système géocentrique de Ptolémée, est un fervent admirateur du nouveau système héliocentrique de Copernic. Voici donc un destin tout tracé.

Assistant de Tycho Brahé et héritier des observations de celui-ci, Kepler (1571 – 1630) établit les premières relations mathématiques de la mécanique céleste que l'on appelle Lois de Kepler ainsi que ses équations.



Première loi de Kepler :

Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe un foyer.

Caractéristique principale : $MF_1 + MF_2 = 2a$

Excentricité : $e = \frac{c}{a}$ distance OF₁ : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

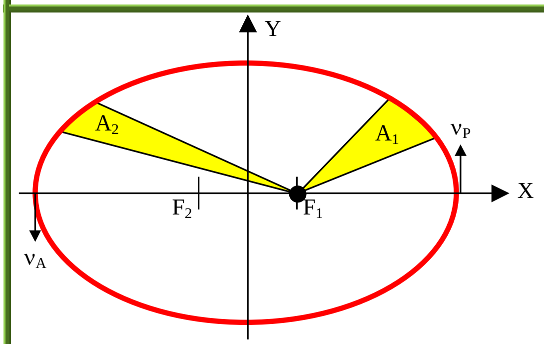
Paramètre focal : $p = \frac{b^2}{a}$ Aire : $A = \pi ab$

Equation cartésienne : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Caractéristique focale : $MF_1 = a - ex$ $MF2 = a + ex$

Forme paramétrique : $x = a \cdot \cos t$ $y = b \cdot \sin t$

Equation polaire : $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\alpha}$



Seconde loi de Kepler :

Le rayon vecteur planète - Soleil balaie des aires proportionnelles au temps mis pour les balayer. La vitesse aréolaire est constante.

Pour un temps de balayage identique : $A_1 = A_2$

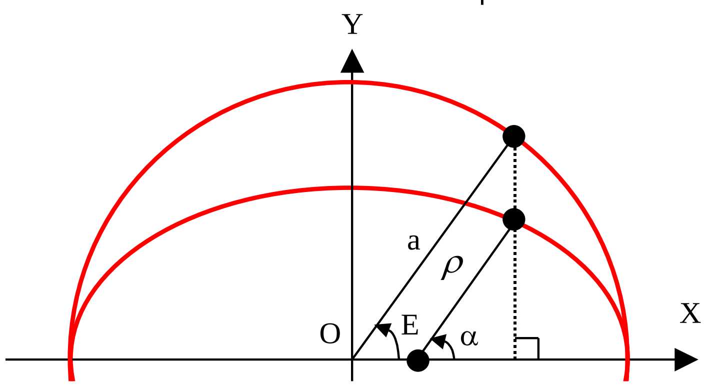
Vitesse aréolaire : $V_{aer} = \frac{dA}{dt} = \frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{T}$ $[\frac{m^2}{s}]$

Troisième loi : **Le carré de la durée de révolution est proportionnel au cube du grand axe de l'orbite.**

$$\boldsymbol{T^2 = a^3 k} \qquad \boldsymbol{\frac{T^2}{a^3} = k = \frac{4\pi^2}{\gamma m_S}} \qquad \boldsymbol{m_S = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma T^2}}$$

$\gamma = 6.67259 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
T en s a en m m_1 en kg
m_S : masse du soleil.

Équation de Kepler : Elle associe une trajectoire circulaire à la trajectoire elliptique.
f : anomalie vraie. **E** : anomalie excentrique. **e** : excentricité. τ : instant de passage au périastre.



Rayon vecteur : $\rho = a(1 - e\cos E)$

Mouvement moyen : $n = \frac{2\pi}{T}$

Anomalie moyenne : $M = n(t - \tau)$

Anomalie vraie : $\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$

Anomalie vraie : $\sin f = \sqrt{1 - e^2} * \frac{\sin E}{1 - e\cos E}$

Équation de Kepler :

$$\boldsymbol{M = n(t - \tau) = E - e\sin E}$$

Cette équation ne possède pas de solution analytique et la détermination de E à un instant donné ne peut se faire qu'à l'aide d'une série de Fourier

$$E - M = e \cdot \sin E = 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n(ne)}{n} \sin(nM)$$

où $J_n(X)$ est la fonction de Bessel.

Exemple pour le Soleil et la Terre :			
T = 1 an = 365,2564 j = 3,15582·10⁷ s		$\rho_{min} = 1.471 \cdot 10^{11}$m	$\rho_{max} = 1.521 \cdot 10^{11}$m
$a = 1.4960 \cdot 10^{11}$m	$b = 1.4958 \cdot 10^{11}$m	$c = 2.4983 \cdot 10^{9}$m	e = 0.01671
V_P = 30037 m/s	V_A = 29540 m/s	Vaér = $2.22762 \cdot 10^{15}\ m^2 * s^{-1}$	

Newton utilisa ces lois pour élaborer la théorie de la gravitation universelle.